

NICHTLINEARE SPEKTRALOPERATOREN IN BANACHRÄUMEN

von
Josef Knott
aus Oberwappenöst

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548225_0052

NICHTLINEARE SPEKTRALOPERATOREN IN BANACHRÄUMEN

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Josef Knott
aus Oberwappenöst

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fachbe-
reichen der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung

23.11.1977

Vorsitzender der kommissarischen
Promotionskommission

Prof. Dr. Schweizer

Erstberichterstatter:

Prof. Dr. Kölzow

Zweitberichterstatter

Prof. Dr. Meinardus

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I. Spektralzerlegung bezüglich starker Konvergenz in schwach vollständigen Banachräumen	6
§1. Positiv-distributive Operatoren	7
1.1 Definition	
1.2 Beispiele	
§2. Wohlbeschränkte Operatoren	10
2.1 Definition	
2.2 Existenz und Limesdarstellung der Smart'schen Spektralfamilie (E_t)	
2.3 Der skalare Spektraloperator von Smart	
2.4 Der Spektralzerlegungssatz von Ringrose	
§3. Metrische Projektionen in normierten Räumen	17
3.1 Definition	
3.2 Eine Charakterisierung nächster Punkte konvexer Mengen durch Semi-Innerprodukte	
3.3 Metrische Projektionen auf konvexe Kegel in reellen Hilberträumen	
§4. Positiv-distributive Spektraloperatoren in schwach vollständigen Banachräumen	22
4.1 Definition	
4.2 Der Spektralzerlegungssatz	
4.3 Beispiele	
II. Spektralzerlegung bezüglich gleichmäßiger Konvergenz in reellen Hilberträumen	31
§5. Positiv-distributive Spektraloperatoren in reellen Hilberträumen	32
5.1 Der Spektraloperator von Zarantonello	
5.2 Eine Charakterisierung des Spektraloperators von Zarantonello	
5.3 Der Spektralzerlegungssatz bezüglich gleichmäßiger Konvergenz	

5.4 Beispiele

- a) positivhomogene Nemytskii-Operatoren
- b) nichtlineare Integraloperatoren vom Uryson-Typ

§6. Analyse des Spektrums eines positiv-distributiven Spektraloperators an Hand seiner Spektralzerlegung 44

- 6.1 Charakterisierung des Spektrums durch Wachstums- und Nichtlinearitätseigenschaften der Spektralfamilie (P_t)
- 6.2 Klassifizierung des Spektrums an Hand des Spektralmaßes in Punkt-, approximatives- und Restspektrum
- 6.3 Beziehungen zwischen Integrationsintervall, Spektrum und numerischen Wertebereich
- 6.4 Beispiel eines nichtlinearen, kompakten Operators mit überabzählbarem Spektrum

Literaturverzeichnis

50

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist eine Erweiterung und Verschärfung der Spektraltheorie von ZARANTONELLO [25] für nichtlineare beschränkte Operatoren, in zweierlei Hinsicht: Erstens werden Operatoren auf reellen oder komplexen schwach vollständigen Banachräumen, statt nur auf reellen Hilberträumen, betrachtet. Zweitens wird bei der Spektralzerlegung die starke Konvergenz durch die gleichmäßige ersetzt. Hiermit ergibt sich gleichzeitig eine Verallgemeinerung des Begriffs des Spektraloperators im Sinne von DUNFORD [5] vom Fall eines linearen skalaren Operators mit reellem, kompaktem Spektrum auf den eines nichtlinearen Operators.

Zu der neuen Klasse von Operatoren, für welche die Existenz einer Spektralzerlegung bewiesen wird, gelangt man wie folgt: Auf schwach vollständigen Banachräumen B betrachte man Operatoren $T: B \rightarrow B$, für welche die kanonische Zuordnung

$$\sum_{i=1}^n a_i t^i \longrightarrow \sum_{i=1}^n a_i T^i$$

von Polynomen zu Operatoren folgende Eigenschaften hat:

Es existiere ein kompaktes Intervall J , eine Konstante $K > 0$, so daß für alle auf J nichtnegative Polynome p gilt:

$$(1) \quad Tp(T) = p(T)T$$

$$(2) \quad p(T) \text{ genügt der Lipschitzbedingung}$$

$$\|p(T)\|_{Lip} \leq K \cdot \|p\|_{\sup_J}.$$

Aus später ersichtlichen Gründen wird J Integrationsintervall

und K Projektionsschranke des Operators T genannt. Nichtlineare Operatoren, die (1) für beliebige Polynome erfüllen, wurden von HUBBARD [9] untersucht und selbst-distributiv genannt. Dementsprechend nennen wir Operatoren, welche (1) für alle auf J nicht-negativen Polynome erfüllen (bezüglich J) positiv-distributiv. Operatoren, mit den Eigenschaften (1) und (2) nennen wir positiv-distributive Spektraloperatoren. Die Bezeichnung Spektraloperator wird bereits durch folgende Beispiele nahegelegt: Jeder lineare, skalare Spektraloperator von DUNFORD mit reellem, kompaktem Spektrum und jeder überall definierte, nichtlineare Spektraloperator von ZARANTONELLO genügt den Bedingungen (1) und (2). Außerdem beweisen wir in §4 den folgenden Satz:

Sei B ein schwach vollständiger Banachraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. $T: B \rightarrow B$ ein positiv-distributiver Spektraloperator. dann gilt: Es existiert genau eine Spektralfamilie (P_t) von positivhomogenen, idempotenten Operatoren P_t mit $\|P_t\|_{\text{Lip}} \leq K$ und

$$(3) \quad T = \int_J t dP_t$$

(bezüglich starker Konvergenz).

Ist $J = [0, +\infty[$, so folgt für alle auf J nichtnegativen Polynome p $P_t p(T) = p(T) P_t$ und für alle Polynome q mit reellen Koeffizienten

$$(4) \quad q(T) = \int_J q(t) dP_t.$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und T linear, so ist T ein skalarer Spektraloperator von DUNFORD mit reellem, kompaktem Spektrum, und umgekehrt.

Um (3) und (4) zu beweisen zeigen wir zunächst in §2, daß für lineare Operatoren mit Eigenschaft (2) die von SMART [21] auf

reflexiven Banachräumen bewiesenen Aussagen über wohlbeschränkte Operatoren auch in schwach vollständigen Banachräumen gelten. Diese Erweiterung beruht auf zwei Sätzen über lineare, beschränkte Abbildungen; nämlich auf einem schwachen Kompaktheitssatz von GROTHENDIECK [8] und einem Ergodensatz von YOSIDA [23]. Mit Hilfe des so erweiterten Ergebnisses von SMART, sowie einer Abschätzung von RINGROSE [18] erhalten wir schließlich die gewünschte Spektralzerlegung von T .

In §4 ergeben sich für den Spezialfall $K = 1$ folgende Aussagen:

Ist die Projektionsschranke K von T gleich 1, so sind die Elemente P_t der Spektralfamilie (P_t) positivhomogene, Lipschitz-stetige Schnitte gewisser metrischer Projektionen von proximalen Mengen C_t von B . Ist B zusätzlich striktkonvex, so sind die proximalen Mengen C_t Tschebyscheff und die Operatoren P_t sind gerade die durch sie induzierten, einzelwertigen, metrischen Projektionen.

In §5 wird mit Hilfe von ZARANTONELLO [25] gefolgert:

(A₁) Jeder positiv-distributive Spektraloperator T mit Integrationsintervall $J[0, +\infty[$ ist ein überalldefinierter Spektraloperator von ZARANTONELLO und umgekehrt.

(A₂) Für jeden positiv-distributiven Spektraloperator T gilt (4) sogar bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.

Im Beweis zu (A₂) benützen wir die in [25] bewiesene verallgemeinerte Schwarz'sche Ungleichung für positivhomogene, monotone Gateaux-Gradientenoperatoren und Theorem 9.8 aus [25]. Am Ende von §5 geben wir einige Beispiele für Spektraloperatoren mit gleichmäßig konvergenter Spektralzerlegung an. Im Hilbertraum

$L^2(D, \mathbb{R})$ können wir zeigen, daß neben gewissen nichtlinearen Integraloperatoren vom Uryson-Typ jeder positivhomogene, monotone Nemytskii-Operator eine gleichmäßig konvergente Spektralzerlegung besitzt.

In §6 wenden wir uns dem Spektrum $\sigma(T)$ von $T = \int_J t dP_t$ zu. Für reelle Hilberträume zeigen wir mit Hilfe von MARTIN [14] und ZARANTONELLO [25], daß sich $\sigma(T)$ aus gewissen Wachstums- und Nichtlinearitätseigenschaften der Spektralfamilie (P_t) folgendermaßen bestimmen läßt.

Bezeichne $\sigma_K(P_t)$ die Menge aller Konstanzpunkte der Spektralfamilie (P_t) und $\sigma_N(P_t)$ die Menge aller $t \in \mathbb{R}$, für welche P_t keine Orthogonalprojektion ist. Dann gilt:

$$(5) \quad \sigma(T) = \left(\bigcap_{\mathbb{R}} \sigma_K(P_t) \right) \cup \sigma_N(P_t) .$$

Als Ergänzung hierzu geben wir unter Verwendung von Ergebnissen aus der Diplomarbeit [10] des Verfassers eine Klassifizierung von $\sigma(T)$ an Hand des durch die Familie (P_t) induzierten Spektralmaßes $P(\cdot)$. Ferner zeigen wir:

Sei $\text{Tr}P(\cdot)$ der Träger von $P(\cdot)$, $W(T)$ der numerische Wertebereich von T und J das Integrationsintervall von T , so gelten folgende Inklusionen:

$$(6) \quad \text{Tr}P(\cdot) \subseteq \sigma(T) \subseteq \overline{W(T)} \subseteq J$$

Um in (6) $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ zu beweisen, benützen wir einen Satz von ZARANTONELLO [26], [27] für stetige, beschränkte Operatoren. Die Formel (5) für das Spektrum $\sigma(T)$ von T legt die Vermutung nahe,

daß im nichtlinearen Fall aus der Kompaktheit des Operators T nicht (wie im linearen Fall) auf die Abzählbarkeit seines Spektrums geschlossen werden kann. In der Tat läßt sich ein Beispiel konstruieren, so daß aus (5) folgt:

Für kompakte Spektraloperatoren von ZARANTONELLO
ist das Spektrum im allgemeinen überabzählbar.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow danke ich herzlich für die Überlassung des Themas und seine intensive wissenschaftliche Unterstützung.

c) Sei $f: B \rightarrow [0,1]$ gegeben. Definieren wir $T: B \rightarrow B$ durch

$$T(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) x, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

so gilt für alle auf $[0,1]$ nichtnegativen Polynome p

$T_p(T) = p(T)T$, da für p und $x \neq 0$ $p(T)(x) = p\left(f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)x\right)$ folgt.

d) Sei B der Banachraum der auf einer Menge M definierten, reellwertigen, beschränkten Funktionen. Für $f \in B$ sei f^+ der Positiv- und f^- der Negativteil von f . Weiter seien g und h zwei nichtnegative Elemente aus B . Definieren wir $T: B \rightarrow B$ durch $T(f)(t) = g(t)f^+(t) - h(t)f^-(t)$, so ist T ein positiv-distributiver Operator bezüglich $J = [0, \max_M(g(t), h(t))]$.

e) Sei B ein reeller oder komplexer Hilbertraum, C ein abgeschlossener, konvexer Kegel von B mit Spitze in Null. Dann ist die von C induzierte, metrische Projektion P_C bezüglich $[0,1]$ positiv-distributiv. (Vgl. §3 Lemma 3.3.2)

f) Für $i = 1, 2, 3, 4$ seien $a_i \geq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist der durch die $(2,2)$ -Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_3 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b \\ b & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{definierte Operator } T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$T(x_1, x_2) = A_1(x_1, x_2)$, falls $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$, $T(x_1, x_2) = A_2(x_1, x_2)$, falls $x_1 \leq 0$ und $x_2 \geq 0$, $T(x_1, x_2) = A_3(x_1, x_2)$, falls $x_1 \leq 0$ und $x_2 \leq 0$, $T(x_1, x_2) = A_4(x_1, x_2)$, falls $x_1 \geq 0$ und $x_2 \leq 0$, für $b = 0$ positiv-distributiv bezüglich $J = [0, \max_1 a_i]$; für

$b \neq 0$ im allgemeinen jedoch nicht. Dies zeigt das folgende Gegenbeispiel. Setze $b = 2$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 0$, $(x_1, x_2) = (-3, 1)$. Für das auf ganz $\mathbb{R}$ nichtnegative Polynom $p(t) = 1 + \frac{1}{4}t^2$ folgt dann: $Tp(T)(x_1, x_2) = (2, -9) \neq (4, -8) = p(T)T(x_1, x_2)$.

- g) Betrachten wir die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als komplexen Banachraum, so ist der Operator $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \bar{z}$, ein nichtlinearer, positiv-distributiver (bezüglich jeder Teilmenge J von $\mathbb{R}$) Operator.

§2 Wohlbeschränkte Operatoren

2.1 Definition (Smart [21])

Ein Operator $A \in L(B)$ heie wohlbeschränkt, falls ein kompaktes Intervall J und eine Konstante $K > 0$ existieren, so daß für alle Polynome p mit reellen Koeffizienten gilt:

$$(*) \quad ||p(A)||_{\sup} \leq K (||p||_{\sup} + \text{var}_J p)$$

Hierbei bedeute $\text{var}_J p$ die Variation von p über J .

2.1.1 Folgerung (Smart [21])

Für einen wohlbeschrnkten Operator $A \in L(B)$ gilt:

- a) Die Zuordnung $p \longrightarrow p(A)$ kann in eindeutiger Weise von der Menge aller Polynome auf die Menge aller absolut-stetigen, reellwertigen Funktionen unter Beibehaltung von (*) fortgesetzt werden. Für die fortgesetzte Zuordnung $f \longrightarrow f(A)$ gilt dann:

i) $f(t)g(t) \longrightarrow f(A)g(A)$

ii) $cf(t) \longrightarrow cf(A)$

iii) $f(t) + g(t) \longrightarrow f(A) + g(A)$

iv) $f(A^*) = (f(A))^*$

- b) Das Spektrum $\sigma(A)$ von A ist stets in dem Intervall J aus Definition 2.1 enthalten.

2.2 Existenz und Limesdarstellung der Smart'schen Spektralfamilie (E_t)

Wir erinnern zunächst an die folgenden Definitionen. (Vgl. Dunford-Schwartz [4]). Eine Teilmenge $M \subset B$ heie schwach folgenkompakt, wenn jede Folge $(x_n) \in M$ eine Teilfolge besitzt, die gegen ein

Element aus B schwach konvergiert. Eine Folge $(y_n) \in B$ heie schwache Cauchy-Folge, wenn für jedes $x^* \in B^*$ die Folge $(x^*(y_n))$ eine Cauchy-Folge ist. B heie schwach vollständig, wenn jede schwache Cauchy-Folge aus B schwach konvergent in B ist.

2.2.1 Satz

- 1) Ist B reflexiv, so ist B auch schwach vollständig.
- 2) Ist B schwach vollständig und besitzt B die Radon-Nikodm Eigenschaft, dann ist B reflexiv.

Beweis: Diestel [3], Dunford-Schwartz [4].

Bemerkung

Beispiele nicht reflexiver, schwach vollständiger Banachräume sind: L^1, l_1 , der Raum $BV(J)$ aller auf dem Intervall J skalaren Funktionen von beschränkter Variation, der Raum $AC(J)$ aller auf J absolutstetigen, skalaren Funktionen. Für weitere Beispiele vergleiche Dunford-Schwartz [4], S. 374-379.

2.2.2 Satz (Yosida [23])

Sei $A \in L(B)$. Es existiere eine Konstante $M > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\|A\|_{\text{sup}} \leq M$. Weiter sei $A_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n A^i$. Besitzt die Folge $(A_n(x))$ für $x \in B$ eine schwach konvergente Teilfolge, so konvergiert $(A_n(x))$ stark in B und der durch $x \rightarrow \lim_n A_n(x)$ definierte Operator ist eine stetige, lineare Projektion.

2.2.3 Satz (Grothendieck [8])

Sei B schwach vollständig über Skalarenkrper $\mathbb{K}$, $C(J, \mathbb{K})$ die Menge aller auf einem kompakten Intervall J stetigen

K -wertigen Funktionen, $S: C(J, K) \rightarrow B$ eine lineare, beschränkte Abbildung. Dann gilt: Ist H eine in $C(J, K)$ beschränkte Teilmenge, so ist $S(H)$ in B schwach folgenkompakt.

Beweis: [8], Proposition 12. (Vgl. auch [4], Theorem VI.7.6).

Mit Hilfe des Funktionalkalküls aus Folgerung 2.1.1 für absolutstetige Funktionen und einem Ergodensatz von Lorch [13] für reflexive Banachräume bewies Smart [21]:

2.2.4 Satz

Sei B reflexiv, $A \in L(B)$ und wohlbeschränkt. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

- 1) Es existiert genau eine Projektion $G_t \in L(B)$ mit
(i) $G_t A = A G_t$ und (ii) $G_t(B)$ ist der Eigenvektorraum von A zu t .
- 2) Auf dem Banachraum $B_t := (I - G_t)(B)$ existiert genau eine Projektion $F_t \in L(B_t)$ mit (iii) $F_t(T(x)) = T(F_t(x))$ für alle $x \in B_t$.
- 3) Für den linearen Operator $E_t := G_t + F_t(I - G_t)$ gilt:
(iv) $E_t E_s = E_t$ für alle $t \leq s$,
(v) $\lim_{s \uparrow t} E_s(y) = E_t(y)$, $\lim_{s \uparrow t} E_s(y) = F_t(I - G_t)(y)$ für alle $y \in B$ im Sinne starker Konvergenz.
(vi) $E_t = 0$ für $t < a$, $E_t = I$ für $t \geq b$, wobei $J = [a, b]$ das Intervall J aus Definition 2.1 ist.

Beweis: Smart [21], Theorem A.

Bemerkung

Smart benötigt im Beweis zu Theorem A aus [21] die Reflexivität von B ausschließlich zum Nachweis der starken Konvergenz der Folge

$(n^{-1} \sum_{i=1}^n (A-tI)^{2+I}{}^{-1}(x))$, alle übrigen, von Smart in diesem Zusammenhang angeführten Argumente können auch in allgemeineren Banachräumen angewendet werden. Diesen Umstand nützen wir im Beweis des folgenden Satzes aus.

2.2.5 Satz

Sei B schwach vollständig, $A \in L(B)$ und für alle Polynome p mit reellen Koeffizienten gelte $\|p(A)\|_{\sup} \leq K \|p\|_{\sup_J}$, (K und J wie in Definition 2.1) dann gilt:

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gelten die Aussagen 1) bis 3) aus Satz 2.2.4.

Beweis: Auf Grund der Eigenschaften von A können wir jedem

$f \in C(J, \mathbb{R})$ in eindeutiger Weise den Operator $f(A) \in L(B)$ mit

$\|f(A)\|_{\sup} \leq K \|f\|_{\sup_J}$ zuordnen. Sei nun $x \in B$ gegeben. Wenden wir

die lineare, beschränkte Abbildung $S: C(J, \mathbb{R}) \rightarrow B$, $S(f) = f(A)(x)$,

für jedes $t \in \mathbb{R}$ auf die in $C(J, \mathbb{R})$ beschränkte Teilmenge

$M_t := \left\{ f_n \in C(J, \mathbb{R}) \mid f_n(s) = n^{-1} \sum_{i=1}^n ((s-t)^{2+I})^{-1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ an, so

folgt aus der schwachen Vollständigkeit von B , der Existenz von

$((A-tI)^{2+I})^{-1}$ in $L(B)$ und Satz 2.2.3: $S(M_t)$ ist schwach folgen-

kompakt in B . Da $f_n(A)(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n ((A-tI)^{2+I})^{-1}(x)$ und

$\|f_n(A)\|_{\sup} \leq K$, ist die Folge $(f_n(A)(x))$ nach Satz 2.2.2 in B

stark konvergent. Die Behauptung folgt nun aus unserer Bemerkung

zum Beweis von Satz 2.2.4.

Wir wollen nun eine Limesdarstellung für die Elemente E_t der Spektralfamilie (E_t) aus Satz 2.2.4 geben. Hierzu benötigen wir die folgenden Lemmata.

2.2.1 Lemma

Sei V ein metrischer Raum, $h: V \rightarrow \mathbb{R}$ rechtsseitig stetig. Dann besitzt h höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Beweis: Smart [21], S.330.

2.2.2 Lemma

Sei B reflexiv, $A \in L(B)$ und wohlbeschränkt, (E_t) die zu A assoziierte Spektralfamilie aus Satz 2.2.4. Definieren wir für $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ $f_n^{(t)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n^{(t)}(s) = 1$, falls $s \leq t - n^{-1}$, $f_n^{(t)}(s) = 2^{-1}n(t-s+n^{-1})$, falls $t-n^{-1} \leq s \leq t+n^{-1}$, und $f_n^{(t)}(s) = 0$, falls $s \geq t+n^{-1}$, so gilt für jeden Stetigkeitspunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ der Abbildung $t \rightarrow E_t$:

$$E_{t_0}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(t_0)}(A)(x)$$

für jedes $x \in B$ im Sinne starker Konvergenz.

Beweis: Da $f_n^{(t_0)}$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ absolutstetig ist, ist $f_n^{(t_0)}(A)$ nach Folgerung 2.1.1 wohldefiniert. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Ringrose [18], Lemma 1.

2.2.3 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.2.2 existiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $x \in B$ eine Folge $(g_k^{(t)})$ von absolutstetigen nichtnegativen Funktionen $g_k^{(t)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt

$$E_t(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k^{(t)}(A)(x).$$

Beweis: Sei $x \in B$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Nach Lemma 2.2.1 existiert eine gegen t_0 monoton fallende Folge (t_i) von Stetigkeitspunkten t_i der Abbildung $t \rightarrow E_t(x)$. Aus deren rechtsseitigen Stetigkeit

folgt $E_{t_0}(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} E_{t_i}(x)$. Ferner gilt nach Lemma 2.2.2 für jedes $i \in \mathbb{N}$ $E_{t_i}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(t_i)}(A)(x)$. Schließlich folgt aus der für alle $i, n \in \mathbb{N}$ gültigen Ungleichung

$$\|E_{t_0}(x) - f_n^{(t_i)}(A)(x)\| \leq \|E_{t_0}(x) - E_{t_i}(x)\| + \|E_{t_i}(x) - f_n^{(t_i)}(A)(x)\|:$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_k(x) \in \mathbb{N}$ und ein $i_k(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|E_{t_0}(x) - f_{n_k}^{(t_{i_k})}(A)(x)\| < k^{-1}. \text{ Setzen wir also für } x \in B \text{ und } t \in \mathbb{R}$$

$g_k^{(t)} := f_{n_k}^{(t_{i_k})}$, so folgt die Behauptung.

2.2.4 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2.5 gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Limesdarstellung aus Lemma 2.2.3.

Beweis: Da die Reflexivität von B in Lemma 2.2.2 nur für den Existenzbeweis der Spektralfamilie (E_t) benötigt wird, kann Lemma 2.2.2 auch unter den Voraussetzungen von Satz 2.2.5 bewiesen werden.

2.3 Der skalare Spektraloperator von Smart

Sei $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Familie von Operatoren aus $L(B)$ mit den Eigenschaften (iv) bis (vi) aus Satz 2.2.4. Bei beliebigem $\delta > 0$ und $J = [a, b]$ sei für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$a - \delta = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b + \delta$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a - \delta, b + \delta]$, für die $\max(|t_0 - t_1|, \dots, |t_{n-1} - t_n|) < N^{-1}$ gilt.

2.3.1 Satz

(i) Die Folge der Riemann-Summen $\sum_{i=0}^{N-1} t_i (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})$ konvergiert in B stark. Der Limesoperator $S := \int_J t dE_t$

heißt der zu (E_t) assoziierte, skalare Spektraloperator.

(ii) Für jedes Polynom p mit reellen Koeffizienten gilt:

$$p(S) = \int_{\mathbb{J}} p(t) dE_t$$

Beweis: Smart [21], Theorem C.

Während Smart $A = S$ nur für spezielle, wohlbeschränkte Operatoren $A \in L(B)$ zeigen konnte, bewies Ringrose in [18] den allgemeinen Fall.

2.4 Der Spektralzerlegungssatz von Ringrose

2.4.1 Satz

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2.4 gilt:

$$p(A) = \int_{\mathbb{J}} p(t) dE_t$$

für alle Polynome p mit reellen Koeffizienten.

Beweis: Ringrose zeigte in [18] $A = S$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.3.1 .

Bemerkung

- 1) Die Voraussetzung "B reflexiv" in Satz 2.4.1 kann nicht durch "B schwach vollständig" ersetzt werden. Dies zeigt das von Ringrose in [19] gegebene Beispiel. Sei $B = L^1(0,1)$, $A: B \rightarrow B$ definiert durch $A(f)(t) = tf(t) + \int_0^t f(s) ds$, dann ist A zwar wohlbeschränkt, es existiert jedoch keine Spektralfamilie (E_t) aus $L(B)$ mit den Eigenschaften (iv) bis (vi) aus Satz 2.2.4 und $A = S$.
- 2) Wir werden in §4 zeigen, daß Satz 2.4.1 in schwach vollständigen Banachräumen richtig bleibt, wenn wir die Bedingung "A wohlbeschränkt" geeignet verschärfen.

§3. Metrische Projektionen in normierten Räumen

In diesem Paragraphen sei B ein normierter Vektorraum mit Norm $|\cdot|$.

3.1 Definition

Sei M eine Teilmenge von B . Für $x \in B$ setzen wir

$$P_M(x) := \left\{ x_M \in M \mid \|x - x_M\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| \right\}.$$

M heie proximal, falls für alle $x \in B$ $P_M(x) \neq \emptyset$. In diesem Fall heie die Abbildung $P_M: B \rightarrow 2^M$ (2^M sei die Potenzmenge von M) die metrische Projektion auf M . Die Elemente der Menge $P_M(x)$ heißen die nächsten Punkte von x bezüglich M . M heie Tschebyscheff, falls M proximal und P_M einwertig ist.

Eine Abbildung $S_M: B \rightarrow M$ heie Schnitt für die metrische Projektion P_M , falls für alle $x \in B$ $S_M(x) \in P_M(x)$ gilt.

3.2 Charakterisierung nächster Punkte konvexer Mengen durch Semi-Innerprodukte

Nach Singer [20] gilt der folgende

3.2.1 Satz

Sei M eine konvexe Teilmenge von B , $x \in B \setminus \bar{M}$ und $x_M \in M$ gegeben. Dann gilt: $x_M \in P_M(x)$ genau dann, wenn ein $f \in B^*$ mit folgenden Eigenschaften existiert: $\|f\|_{B^*} = 1$,
 $f(x - x_M) = \|x - x_M\|$ und $\operatorname{Re}(f(x_M - y)) \geq 0$ für alle $y \in M$.

Hieraus erhalten wir unter Verwendung der Dualittsabbildung $F: B \rightarrow 2^{B^*}$, definiert durch $F(z) = \left\{ g \in B^* \mid g(z) = \|z\|^2 = \|g\|_{B^*}^2 \right\}$,

die folgende Charakterisierung:

3.2.2 Satz

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.1 gilt:

$x_M \in P_M(x)$ genau dann, wenn ein die Norm von B induzierendes Semi-Innerprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ existiert, so daß gilt:

$$\operatorname{Re}\langle x - x_M, x_M - y \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } y \in M.$$

Beweis: Sei $x_M \in P_M(x)$. Nach Satz 3.2.1 existiert ein $f \in B^*$ mit $\|f\|_{B^*} = 1$, $f(x - x_M) = \|x - x_M\|$ und $\operatorname{Re}(f(x_M - y)) \geq 0$ für alle $y \in M$.

Definieren wir $g := \|x - x_M\| f$, so ist nach Martin [14] (S.44)

$g \in F(x - x_M)$, wobei F die Dualitätsabbildung auf B sei. Mit Hilfe des Auswahlaxioms wählen wir für jedes $u \in B$, $u \neq x - x_M$, aus $F(u)$ (nach dem Satz von Hahn-Banach ist $F(u)$ stets nicht leer) ein lineares Funktional g_u aus. Ferner setzen wir $g_{x - x_M} := g$. Definieren wir jetzt für jedes Paar $(u, v) \in B \times B$

$$\langle u, v \rangle := g_u(v),$$

so erhalten wir ein Semi-Innerprodukt auf $B \times B$ mit der Eigenschaft:

Für alle $y \in M$ ist

$$\operatorname{Re}\langle x - x_M, x_M - y \rangle = \operatorname{Re}(g(x_M - y)) = \|x - x_M\| \operatorname{Re}(f(x_M - y)) \geq 0.$$

Ferner induziert $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Norm $\|\cdot\|$ von B , den $\langle u, u \rangle = g_u(u) = \|u\|^2$, also $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$.

Sei nun umgekehrt ein Semi-Innerprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $B \times B$ gegeben, so daß für alle $u \in B$ $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ und für alle $y \in M$

$\operatorname{Re}\langle x - x_M, x_M - y \rangle \geq 0$ gilt. Auf B definieren wir ein lineares Funktional f durch $f(u) := (\|x - x_M\|)^{-1} \langle x - x_M, u \rangle$. Für f gilt dann:

$f(x - x_M) = \|x - x_M\|$, $f(u) \leq \|u\|$ für alle $u \in B$ und $\operatorname{Re}(f(x_M - y)) \geq 0$ für alle $y \in M$. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 3.2.1.

Bemerkung

Ist B ein reeller Hilbertraum, so stimmt unsere Charakterisierung der nächsten Punkte einer konvexen Menge in B mit der von Zaran-tonello [25] überein. Da für diesen Fall das Semi-Innerprodukt aus Satz 3.2.2 eindeutig bestimmt und in beiden Komponenten linear ist, können hieraus weitere Eigenschaften für die metrische Pro-jektion abgeleitet werden.

3.3 Metrische Projektionen auf konvexe Kegel in reellen Hilberträumen

Im Folgenden sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$. Da H reflexiv und strikt konvex ist, ist jede ab-geschlossene, konvexe Teilmenge M von H Tschebyscheff; die metr-ische Projektion P_M auf M ist also ein überall definierter, ein-wertiger Operator mit Werten in M . Wir geben zunächst mit Hilfe von Satz 3.2.2 eine Charakterisierung von P_M und wenden uns dann einigen Eigenschaften der metrischen Projektion auf konvexe Kegel zu, die bereits von Zarantonello in [25] bewiesen wurden.

3.3.1 Definition

Ein Operator $T:H \rightarrow H$ heiÙe monoton, falls für alle $x, y \in H$ gilt: $\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq 0$.

3.3.1 Satz

Ein Operator $T:H \rightarrow H$ mit $\|T\|_{Lip}=1$ ist genau dann metr-ische Projektion auf eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von H , wenn T monoton und idempotent ist.

Beweis: Nach Theorem 8.2 aus Browder [2] ist $T(H)$ wegen $T^2=T$ und $\|T\|_{Lip}=1$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Sei nun $x \in H$ fest gewählt. Dann folgt für alle $y \in T(H)$ mit einem Lemma von Minty

(vgl. Nierenberg [16], Lemma 5.1.2) aus der Monotonie von $T : \langle x - T(x), T(x) - y \rangle \geq 0$. Nach Satz 3.2.2 ist $T(x)$ also nächster Punkt von x bezüglich $T(H)$. Da $x \in H$ beliebig, folgt: $T = P_{T(H)}$.

Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt aus dem nachstehenden Lemma 3.3.2

In den folgenden Lemmata und Definitionen bezeichne C oder C_i , $i=1,2$ stets einen abgeschlossenen, konvexen Kegel von H mit Spitze in Null und P_C bzw. P_{C_i} die induzierten, metrischen Projektionen. $C^\perp := \{y \in H \mid \langle y, x \rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in C\}$ heiße der zu C duale Kegel. Es gilt: $C^\perp$ ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit Spitze in Null, $C \cap C^\perp = \{0\}$ und $C^{\perp\perp} = C$. Ein Paar C_1, C_2 heie dual, falls $C_1^\perp = C_2$ und $C_1 = C_2^\perp$ ist.

3.3.1 Lemma (Moreau [15])

Gegeben sei ein duales Paar C_1, C_2 . Dann läßt sich jedes $x \in H$ auf genau eine Weise darstellen als $x = x_1 + x_2$, mit $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ und $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. Es gilt:

$$x = P_{C_1}(x) + P_{C_2}(x) .$$

3.3.2 Lemma

Sei $C \subset H$ gegeben. Dann gilt:

- (1) P_C ist monoton. (2) $\|P_C\|_{\text{Lip}} = 1$ und $P_C^2 = P_C$.
- (3) $P_{C^\perp} = I - P_C$, $\|P_C(x)\|^2 = \langle x, P_C(x) \rangle$ fr alle $x \in H$.
- (4) P_C ist positiv-distributiv bezglich $[0,1]$.

Beweis: (1) und (2) folgen aus [25] Lemma 1.2, (3) aus Lemma 3.3.1.

Zu (4): Sei p ein auf $[0,1]$ nichtnegatives Polynom, $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$,

so ist $P_C p(P_C) = P_C(a_0 P_C + p(1)P_C)$. Aus Lemma 3.3.1 folgt
 hieraus $P_C p(P_C) = p(1)P_C = p(P_C)P_C$

3.3.2 Definition

Seien C_1, C_2 zwei Kegel in H . Dann heißen P_{C_1}, P_{C_2}
orthogonal, falls für alle $x \in H$ $\langle P_{C_1}(x), P_{C_2}(x) \rangle = 0$ ist.

3.3.3 Lemma

Sei $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Familie von metrischen Projektionen auf
 abgeschlossene, konvexe Kegel mit Spitze in Null und
 $P_s P_t = P_s$ für $s \leq t$, dann gilt: (i) $P_t - P_s$ ist metrische
 Projektion auf einen angeschlossenen, konvexen Kegel mit
 Spitze in Null. (ii) $P_{t_1} - P_{s_1}$ und $P_{t_2} - P_{s_2}$ sind orthogonal,
 falls $[s_1, t_1] \cap [s_2, t_2] = \emptyset$.

Beweis: Zarantonello [25], Theorem 5.3 und Lemma 7.1 .

3.3.4 Lemma

Die metrische Projektion P_C ist ein Gateaux-Gradientenoperator.

Beweis: Theorem 9.8 und Theorem 10.1 aus Zarantonello [25].

§4. Positiv-distributive Spektraloperatoren in schwach vollständigen Banachräumen

4.1 Definition

Ein Operator $T \in \text{Lip}_0(B)$ heie positiv-distributiver Spektraloperator, falls ein kompaktes Intervall J und eine Konstante $K > 0$ existieren, so daß für alle auf J nichtnegativen Polynome p gilt:

(i) $p(T)$ genügt der Lipschitzbedingung

$$\|p(T)\|_{\text{Lip}} \leq K \|p\|_{\sup_J} ,$$

(ii) T ist bezüglich J positiv-distributiv.

K heie die Projektionsschranke und J das Integrationsintervall des Operators T .

4.1.1 Folgerung

Die Zuordnung $p \rightarrow p(T)$ kann in eindeutiger Weise auf die Menge $C(J, \mathbb{R})$ aller auf J stetigen Funktionen fortgesetzt werden. Die Fortsetzung $f \rightarrow f(T)$ hat dann die folgenden Eigenschaften:

Für $f, g \in C(J, \mathbb{R})$, nichtnegativ auf J gilt:

$$1) f(T)g(T) = g(T)f(T)$$

$$2) \|f(T)\|_{\text{Lip}} \leq K \|f\|_{\sup_J} .$$

Für beliebiges $h \in C(J, \mathbb{R})$ gilt:

$$3) \|h(T)\|_{\text{Lip}} \leq 2K \|h\|_{\sup_J} .$$

Beweis: Ist $f \in C(J, \mathbb{R})$ und nichtnegativ auf J , so wählen wir

eine Folge von Polynomen (p_n) , die monoton fallend gegen f auf J gleichmäßig konvergiert. Wegen (i) aus Definition 4.1 und der Vollständigkeit von $\text{Lip}_0(B)$ bezüglich $||\cdot||_{\text{Lip}}$ existiert der Limes $f(T) := \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(T)$ in $\text{Lip}_0(E)$ und ist unabhängig von der f approximierenden Polynomfolge (p_n) . Ist $h \in C(J, \mathbb{R})$, h beliebig, so setzen wir $h(T) := h^+(T) - h^-(T)$, wobei h^+ der Positiv- und h^- der Negativteil von h ist. Die Eigenschaften 1) bis 3) folgen dann aus i) und (ii) der Definition 4.1 durch Limesbildung.

Eine Rechtfertigung für die Bezeichnung "Spektraloperator" gibt uns der folgende Satz.

4.2 Satz (Spektralzerlegung in schwach vollständigen Banachräumen)

Ist B ein schwach vollständiger Banachraum, so existiert zu jedem positiv-distributiven Spektraloperator $T \in \text{Lip}_0(B)$ genau eine Spektralfamilie $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von positivhomogen, idempotenten Operatoren $P_t \in \text{Lip}_0(B)$ mit $||P_t||_{\text{Lip}} \leq K$, so daß gilt:

$$T = \int_J t dP_t \quad (\text{bezüglich starker Konvergenz})$$

Ist $J = [0, +\infty[$, so folgt für alle auf J nichtnegativen Polynome p $P_t p(T) = p(T) P_t$ und für alle Polynome q mit reellen Koeffizienten

$$q(T) = \int_J q(t) dP_t.$$

Beweis: Für das Integrationsintervall J von T gelte: $J = [0, 1]$.

Sei nun $x \in B$ beliebig und fest gewählt. Für $x \in B$ und T definieren wir den folgenden konvexen Kegel mit Spitze in Null von B :

$$(1) C_x := \left\{ p(T)(x) \mid p \text{ Polynom, } p(t) \geq 0 \text{ für } t \in [0,1] \right\}.$$

Für $z_i \in C_x$, $i = 1, 2$ setzen wir weiter

$$(2) T^X(z_1 - z_2) := T(z_1) - T(z_2).$$

Da T nach Voraussetzung positiv-distributiv ist, wird durch (2) (vgl. [25]) auf dem reellen Unterraum $B_x := C_x - C_x$ ein wohldefinierter, linearer Operator $T^X: B_x \rightarrow B_x$ gestiftet mit

$$(3) T^X(y) = T(y) \quad \text{für alle } y \in C_x, \text{ und}$$

$$(4) \|T^X(z)\| \leq K \|z\| \quad \text{für alle } z \in B_x.$$

T^X läßt sich wegen (4) eindeutig auf den abgeschlossenen, reellen Unterraum $\overline{B}_x$ von B fortsetzen. Wir bezeichnen die Fortsetzung von T^X mit $\tilde{T}^X$. Auf dem reellen Banachraum $(\overline{B}_x, \|\cdot\|)$ gilt dann für den linearen Operator $\tilde{T}^X: \overline{B}_x \rightarrow \overline{B}_x$:

$$(5) \|\tilde{T}^X(z)\| \leq K \|z\| \quad \text{für alle } z \in \overline{B}_x,$$

$$(6) \tilde{T}^X(y) = T(y) \quad \text{für alle } y \in \overline{C}_x,$$

$$(7) \|p(T^X)\|_{\sup} \leq K \|p\|_{\sup_J} \quad \text{für alle auf } J \text{ nichtnegativen Polynome } p,$$

$$(8) \|q(T^X)\|_{\sup} \leq 2K \|q\|_{\sup} \quad \text{für alle Polynome } q \text{ mit reellen Koeffizienten.}$$

(5) und (6) folgen aus (3), (4) und der Stetigkeit von T , (7) und (8) gelten wegen (3) und Folgerung 4.1.1. Da jetzt mit B auch $\overline{B}_x$ schwach vollständig ist, können wir wegen (8) Satz 2.2.5 auf den Operator T^X anwenden. Damit existiert genau eine Familie (E_t^X) aus $L(\overline{B}_x)$ mit den Eigenschaften

$$(9) E_t^X \tilde{T}^X = \tilde{T}^X E_t^X,$$

$$(10) E_t^X E_s^X = E_t^X \quad \text{für } t \leq s,$$

$$(11) \lim_{t \downarrow s} E_t^X(z) = E_s^X(z), \quad \lim_{t \uparrow s} E_t^X(z) \text{ existiert für } z \in \overline{B}_x,$$

$$(12) \quad E_t^x = 0 \quad \text{für } t < 0, \quad E_t^x = I_{\overline{B}_x} \quad \text{für } t \geq 1.$$

Ferner existiert nach Satz 2.3.1 der zu (E_t^x) assoziierte skalare Spektraloperator $S^x = \int_{\mathbb{J}} t dE_t^x$ als stark konvergentes Riemann-Integral in $L(\overline{B}_x)$. Wir zeigen jetzt:

$$(13) \quad T^x = S^x.$$

Sei $z_0 \in \overline{B}_x$ gegeben. Wegen (11) und Lemma 2.2.1 existiert bei beliebigem $\delta > 0$ für jede natürliche Zahl N eine Unterteilung

$$-\delta = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1 + \delta,$$

des Intervalls $[-\delta, 1 + \delta]$, so daß jedes t_i ein Stetigkeitspunkt der Abbildung $t \rightarrow E_t^x(z_0)$ ist und $\max_i (t_{i+1} - t_i) < (2KN)^{-1}$ gilt.

Hierbei ist K die Projektionsschranke von T . Wie in [18] definieren wir für t_i , $i = 1, 2, \dots, N$ und genügend großem $n \in \mathbb{N}$ die folgenden absolutstetigen Funktionen $h_{t_i, t_{i+1}}^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h_{t_i, t_{i+1}}^{(n)}(s) = 0, \quad \text{falls } s \leq t_i - n^{-1} \quad \text{oder } s \geq t_{i+1} + n^{-1}$$

$$h_{t_i, t_{i+1}}^{(n)}(s) = 1, \quad \text{falls } t_i + n^{-1} \leq s \leq t_{i+1} - n^{-1}, \quad \text{und } h_{t_i, t_{i+1}}^{(n)} \text{ ist}$$

linear auf jedem der Intervalle $[t_i - n^{-1}, t_i + n^{-1}]$ und $[t_{i+1} - n^{-1}, t_{i+1} + n^{-1}]$.

$$\text{Ferner setzen wir } S_{N,x} := \sum_{i=0}^{N-1} t_i (E_{t_{i+1}}^x - E_{t_i}^x) \quad \text{und}$$

$$S_{N,x}^{(n)} := \sum_{i=0}^{N-1} t_i h_{t_i, t_{i+1}}^{(n)}(\tilde{T}^x). \quad \text{Nach Ringrose gilt bei festem } N$$

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{N,x}^{(n)}(z_0) = S_{N,x}(z_0),$$

$$(15) \quad \sup_{t \in \mathbb{J}} \left| t - \sum_{i=0}^{N-1} t_i h_{t_i, t_{i+1}}^{(n)}(t) \right| < (2KN)^{-1} \quad \text{für genügend großes } n \in \mathbb{N}$$

Aus (7), Folgerung 4.1.1 und (15) folgt nun

$||\tilde{T}^X(z_0) - S_{N,X}^{(n)}(z_0)|| < N^{-1}||z_0||$. Da $z_0 \in \bar{B}_X$ beliebig war, erhalten wir jetzt (13) aus (14) und Satz 2.3.1.

Da weiter für alle $k \in \mathbb{N}$ $T^k(x) \in C_X$ und wegen (13) $q(\tilde{T}^X) = q(S^X)$ für alle Polynome q mit reellen Koeffizienten gilt, folgt aus (6) für solche Polynome q

$$(16) \quad q(T)(x) = \int_J q(t) dE_t^X(x).$$

Da $x \in B$ beliebig war, können wir (1) bis (16) für jedes $x \in B$ durchführen. Insbesondere erhalten wir hieraus für jedes $t \in \mathbb{R}$ den folgenden Operator

$$(17) \quad P_t: B \longrightarrow B, \quad P_t(x) = E_t^X(x).$$

Die Familie $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$ besitzt die Eigenschaften einer Spektralfamilie. Denn aus der Definition von P_t , (11) und (12) folgt für alle $x \in B$ $\lim_{t \rightarrow s} P_t(x) = P_s(x)$, $P_t = 0$ für $t < 0$ und $P_t = I$ für $t \geq 1$. Wir zeigen weiter: $P_t P_s = P_t$ für $t \leq s$. Wegen (6) und Lemma 2.2.4 gilt zunächst für alle $x \in B$ $P_s(x) \in \bar{C}_X$. Ferner existiert eine Folge $(g_k^{(t)})$ von auf $\mathbb{R}$ nichtnegativen, stetigen Funktionen mit $P_t(P_s(x)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k^{(t)}(T)(P_s(x))$. Also folgt wegen (6) $P_t(P_s(x)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k^{(t)}(\tilde{T}^X)(E_s^X(x)) = E_t^X(E_s^X(x)) = E_t^X(x) = P_t(x)$. Weiter folgt aus (6), Lemma 2.2.4 und Folgerung 4.1.1

(18) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist P_t eindeutig durch T bestimmt und für alle auf J nichtnegativen Polynome p gilt:

$$P_t p(T) = p(T) P_t.$$

Wir zeigen nun:

$$(19) \quad ||P_t||_{Lip} \leq K \quad \text{und} \quad ||I - P_t||_{Lip} \leq K.$$

Hierzu seien $x, y \in B$ und $t \in \mathbb{R}$ fest gewählt.

Dann existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $k_0(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ gilt: $\|P_t(x) - g_k^{(t)}(T)(x)\| \leq \varepsilon$, $\|P_t(y) - g_k^{(t)}(T)(y)\| \leq \varepsilon$.

Da nach Definition der Funktionen $g_k^{(t)}$ aus Lemma 2.2.4

$g_k^{(t)} \Big|_{J^{\text{sup}}} = 1$ ist, folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \|P_t(x) - P_t(y)\| &\leq \|P_t(x) - g_k^{(t)}(T)(x)\| + \|P_t(y) - g_k^{(t)}(T)(y)\| + \\ &\quad \|g_k^{(t)}(T)(x) - g_k^{(t)}(T)(y)\| \leq 2\varepsilon + K\|x - y\|. \end{aligned}$$

Analog folgt: $\|(I - P_t)(y)\| \leq 2\varepsilon + K\|x - y\|$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist (19) somit bewiesen.

Ersetzen wir schließlich in (16) $E_t^x(x)$ durch $P_t(x)$, so folgt die Behauptung des Satzes 4.2 für den Fall $J = [0, 1]$ aus (16), (18) und (19).

Ist $J = [a, b]$, so setzen wir $T_{a,b} := (b-a)^{-1}(T - aI)$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß $T_{a,b}$ ein bezüglich $[0, 1]$ positiv-distributiver Spektraloperator ist. Sei also (P_t) die zu $T_{a,b}$ gehörende Spektralfamilie, dann folgt mit der durch

$$\tilde{P}_s := \begin{cases} I, & \text{für } s \geq b, \\ \frac{P_{s-a}}{b-a}, & \text{für } a \leq s < b, \\ 0, & \text{für } s < a, \end{cases}$$

definierten Spektralfamilie die Behauptung des Satzes 4.2 für den allgemeinen Fall aus

$$T = (b-a)T_{a,b} + aI = \int_{[0,1]} ((b-a)t + a) dP_t = \int_J s d\tilde{P}_s$$

und (16), (18) und (19).

4.2.1 Korollar

Sei B schwach vollständig, $T \in \text{Lip}_0(B)$ ein positiv-distributiver Spektraloperator mit Projektionsschranke $K = 1$. Dann gilt: Die Elemente P_t der zu T gehörenden Spektralfamilie (P_t) sind positivhomogene, Lipschitz-stetige Schnitte von metrischen Projektionen auf proximale Teilmengen C_t von B .

Beweis: Wir setzen $C_t := \{P_t(x) \mid x \in B\}$ und zeigen, C_t ist proximal. Da $P_t^2 = P_t$ und $\|I - P_t\|_{\text{Lip}} \leq 1$, folgt für alle $x \in B$ und alle $y \in C_t$ $\|x - P_t(x)\| \leq \|x - y\|$. Also gilt: $P_t(x) \in P_{C_t}(x)$ für alle $x \in B$. Damit ist P_t wegen $\|P_t\|_{\text{Lip}} \leq 1$ und (17) aus dem Beweis zu Satz 4.2 ein positivhomogener, Lipschitz-stetiger Schnitt der nicht notwendig einwertigen, metrischen Projektion P_{C_t} .

4.2.2 Korollar

Für strikt konvexe Banachräume B gilt unter den Voraussetzungen von Korollar 4.2.1: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist C_t ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit Spitze in Null von B , C_t ist Tschebyscheff und $P_t = P_{C_t}$.

Beweis: Da P_t ein positivhomogener, idempotenter Operator mit $\|P_t\|_{\text{Lip}} \leq 1$ ist, folgt aus Browder [2], Theorem 8.2, C_t ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit Spitze in Null. Ferner ist die Menge $P_{C_t}(x)$ für alle $x \in B$ einpunktig, da B strikt konvex ist. Also folgt die Behauptung aus Korollar 4.2.1.

4.3 Beispiele positiv-distributiver Spektraloperatoren

- 1) Ist B ein schwach vollständiger, komplexer Banachraum, so gilt für jeden Operator $A \in L(B)$: A ist ein positiv-

-distributiver Spektraloperator genau dann, wenn A ein skalarer Spektraloperator von Dunford mit reellem, kompaktem Spektrum ist.

Beweis: Nach Dunford-Schwartz [6] gilt: Ein $A \in L(B)$ mit reellem, kompaktem Spektrum $\sigma(A)$ ist genau dann ein skalarer Spektraloperator von Dunford [5], wenn für jedes Polynom P $\|P(A)\|_{\sup} \leq M \|P\|_{\sup_{\sigma(A)}}$ gilt, wobei die Konstante M nur von A abhängt. Ist umgekehrt A ein positiv-distributiver Spektraloperator mit Integrationsintervall J , so folgt aus der Multiplikativität der Zuordnung $p \rightarrow p(A) : \sigma(A) \rightarrow J$. Ersetzen wir die Projektionsschranke K von A durch $4K$, so folgt die Behauptung aus dem eben erwähnten Satz von Dunford-Schwartz.

- 2) Für den in §1, Beispiel 1.2(g) angeführten Operator T : gilt mit $J = [-1, +1]$ für alle Polynome p mit reellen Koeffizienten $\|p(T)\|_{\sup} \leq \|p\|_{\sup}$.

Beweis: Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\operatorname{Re}(z)$ der Real-, $\operatorname{Im}(z)$ der Imaginärteil von z . Ferner sei $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\rho(z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$, und A die symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ $T^n(z) = \rho^{-1} A^n \rho(z)$ und damit für alle Polynome p mit reellen Koeffizienten und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|p(T)(z_1) - p(T)(z_2)\| &= \|\rho^{-1} p(A) \rho(z_1) - \rho^{-1} p(A) \rho(z_2)\| = \\ &= \|p(A)(\rho(z_1) - \rho(z_2))\| \leq \|p\|_{\sup} \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

- 3) Sei $(M, \mathcal{L}, \mu)$ ein positiver Maßraum. Für $1 \leq p < +\infty$ sei $L^p(M, \mathcal{L}, \mu, \mathbb{R})$ der in 4, III.3.4 definierte Banachraum mit

Norm $\|f\|_p = (\int_M f(t)^p \mu(dt))^{\frac{1}{p}}$. Ferner seien $g, h \in L^p(M, \mathcal{L}, \mu, \mathbb{R})$ zwei auf M nichtnegative Funktionen mit folgender Eigenschaft: Es existiere eine Konstante $K > 0$, so daß für μ -fast alle $t \in M$ $g(t) \leq K$ und $h(t) \leq K$ gilt.

Dann ist der durch $T: L^p(M, \mathcal{L}, \mu, \mathbb{R}) \longrightarrow L^p(M, \mathcal{L}, \mu, \mathbb{R})$, $T(f)(t) := g(t)f^+(t) - h(t)f^-(t)$, definierte Operator ein bezüglich $J = [0, K]$ positiv-distributiver Spektraloperator.

Beweis: Sei q ein auf J nichtnegatives Polynom, $f \in L^p(M, \mathcal{L}, \mu, \mathbb{R})$. Nach geeigneter Definition der Funktion $T(f)$ auf einer μ -Nullmenge gilt dann:

$q(T)(f)(t) = q(g(t))f^+(t) - q(h(t))f^-(t)$ und damit

$$Tq(T) = q(T)T.$$

Seien nun $f_1, f_2 \in L^p(M, \mathcal{L}, \mu, \mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt für μ -fast alle $t \in M$:

$$\begin{aligned} |f_1(t) - f_2(t)| &\geq |f_1^+(t) - f_2^+(t)|, \quad |f_1(t) - f_2(t)| \geq |f_1^-(t) - f_2^-(t)|, \\ |q(T)(f_1)(t) - q(T)(f_2)(t)| &= \\ |q(g(t))f_1^+(t) - f_2^+(t) + q(h(t))(f_2^-(t) - f_1^-(t))| &\leq \\ \|q\| \sup_J (|f_1^+(t) - f_2^+(t)| + |f_1^-(t) - f_2^-(t)|). \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\|q(T)(f_1) - q(T)(f_2)\|_p \leq 2\|q\| \sup_J \|f_1 - f_2\|_p.$$

II. Spektralzerlegung bezüglich gleichmäßiger Konvergenz in reellen Hilberträumen

Im zweiten Teil unserer Arbeit werden wir zeigen, daß die Aussage von Satz 4.2 für gewisse positiv-distributive Spektraloperatoren wesentlich verschärft werden kann. Ferner geben wir für solche Operatoren eine detaillierte Analyse ihres Spektrums an Hand ihrer Spektralzerlegung.

In den folgenden Paragraphen 5 und 6 bezeichnet H stets einen reellen Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $|| \cdot ||$.

§5. Positiv-distributive Spektraloperatoren in reellen Hilbert- räumen

In diesem Paragraphen benützen wir die folgenden Abkürzungen:

$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$, $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty[$, $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0, +\infty]$, versehen mit den üblichen Topologien.

5.1 Der Spektraloperator von Zarantonello

Gegeben sei eine Spektralfamilie (P_t) , $t \in \overline{\mathbb{R}}$, $P_{-\infty} = 0$, $P_{+\infty} = I$, von metrischen Projektionen $P_t: H \rightarrow H$ auf abgeschlossene, konvexe Kegel mit Spitze in Null. Zarantonello zeigte in [25] (Theorem 7.1), daß die Familie (P_t) auf kanonische Weise ein (metrische) projektion - wertiges Spektralmaß $P(\cdot)$ induziert. $P(\cdot)$ ist auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ definiert, die alle Borelmengen enthält. Für $s, t \in \overline{\mathbb{R}}$, $s \leq t$, ist $P([s, t]) = P_t - P_s$. Sei M eine Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$.

Eine Funktion $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heie meßbar bezuglich der Spektralfamilie (P_t) , wenn fur jede offene Menge U gilt: $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

Eine Funktion $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ heie bezuglich (P_t) positiv-einfach, falls s von der Form

$$s(t) = \sum_{i=1}^n s_i 1_{E_i}(t)$$

ist, wobei $s_i \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $E_i \in \mathcal{A}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ fur $i \neq j$, und 1_{E_i} die Indikatorfunktion von E_i ist.

Schließlich werde mit $\text{Tr}P(\cdot)$ der Trager des Spektralmaßes $P(\cdot)$ bezeichnet.

5.1.1 Definition

Das Integral einer bezuglich (P_t) einfachen Funktion

$s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist der Operator $\int_{\text{Tr}P(\cdot)} s(t) dP_t := \sum_i s_i P(E_i)$.

Wir bemerken, daß $\int_{\text{Tr}P(\cdot)} s(t) dP_t$ ein auf ganz H definierter, positivhomogener Operator ist.

5.1.2 Definition

Das Integral einer bezüglich (P_t) meßbaren Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ ist der Operator $\int_{\text{Tr}P(\cdot)} f(t) dP_t$ definiert durch
$$\left(\int_{\text{Tr}P(\cdot)} f(t) dP_t \right)(x) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{\text{Tr}P(\cdot)} s_k(t) dP_t \right)(x) ;$$
 wobei (s_k) eine Folge von bezüglich (P_t) positiv-einfachen Funktionen ist, die monoton steigend punktweise gegen f konvergiert. Der Definitionsbereich des Operators ist die Menge aller $x \in H$, für die der Limes auf der rechten Seite existiert.

Bemerkung

Ist $u: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ eine bezüglich (P_t) meßbare, fast überall endliche Funktion, so ist der Operator $\int_{\text{Tr}P(\cdot)} u(t) dP_t$ von der Form $\int_{\text{Tr}\tilde{P}(\cdot)} t \tilde{P}_t$, wobei $\tilde{P}_t := P(\{s \in \mathbb{R} \mid u(s) \leq t\})$ und (P_t) ist wieder eine Spektralfamilie, vgl. [25], §9) $\text{Tr}\tilde{P}(\cdot)$ der Träger von $\tilde{P}(\cdot)$ ist.

5.1.3 Definition

Ein Operator $T: D(T) \rightarrow H$, mit Definitionsbereich $D(T) \subseteq H$, heie ein Spektraloperator von Zaranonello, falls eine Spektralfamilie (P_t) , $t \in \overline{\mathbb{R}}$, von metrischen Projektionen $P_t: H \rightarrow H$ auf abgeschlossene, konvexe Kegel mit Spitze in Null existiert, so daß gilt:

$$\text{Tr}P(\cdot) \subseteq \overline{\mathbb{R}}^+, \quad T(x) = \left(\int_{\text{Tr}P(\cdot)} t dP_t \right)(x) \quad \text{für alle } x \in D(T).$$

Sei nun $T: H \rightarrow H$ ein beralldefinierter Spektraloperator von Zaranonello mit Spektralfamilie (P_t) gegeben. Setzen wir für jede bezüglich (P_t) meßbare Funktion $u: \text{Tr}P(\cdot) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, $v: \text{Tr}P(\cdot) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ $u(T) := \int_{\text{Tr}P(\cdot)} u dP_t$ und $v(T) := \int_{\text{Tr}P(\cdot)} v dP_t$, dann gelten folgende Eigenschaften.

5.1.1 Satz (Zarantonello)

- (i) $u(T)$ ist ein auf ganz H definierter, positivhomogener, monotoner Gateaux-Gradientenoperator.
- (ii) $u(T)+v(T) = \int_{\text{Tr}P(\cdot)} (u(t)+v(t)) dP_t,$
 $u(T)v(T) = \int_{\text{Tr}P(\cdot)} u(t)v(t) dP_t.$
- (iii) $\|u(T)\|_{\text{Lip}} = \sup_{t \in \text{Tr}P(\cdot)} u(t).$

Beweis: (i) folgt aus Theorem 9.1, 9.4 und 9.8, (ii) und (iii) aus Theorem 9.2 von Zarantonello [25].

Die folgenden Aussagen beziehen sich auf Spektraloperatoren von Zarantonello, deren Definitionsbereich ganz H ist.

5.2 Charakterisierung des Spektraloperators von Zarantonello

5.2.1 Satz

Sei $T \in \text{Lip}_0(H)$ gegeben. T sei monoton und bezüglich eines kompakten Intervalles $J \subseteq \mathbb{R}^+$ positiv-distributiv. Ferner gelte für alle auf J nichtnegativen Polynome p und q für $x, y \in H$:

- (i) $\langle p(T)(x), q(T)(x) \rangle = \langle x, p(T)(q(T)(x)) \rangle,$
(ii) $\|p(T)(x) - p(T)(y)\|^2 \leq \langle (p(T))^2(x) - (p(T))^2(y), x - y \rangle.$

Dann ist T ein Spektraloperator von Zarantonello und umgekehrt.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Zarantonello [25], Theorem 10.1 .

5.2.2 Satz

Sei $T \in \text{Lip}_0(H)$ gegeben. Dann sind äquivalent:

- (a) T ist ein positiv-distributiver Spektraloperator mit Projektionsschranke $K=1$ und Integrationsintervall $J \subseteq \mathbb{R}^+.$

(b) T ist ein Spektraloperator von Zarantonello.

Beweis: Wegen Satz 5.1.1, bleibt zu zeigen: Aus (a) folgt (b).

T genüge also der Bedingung (a). Wir beweisen: T ist monoton und erfüllt (i) und (ii) aus Satz 5.2.1. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und fest gegeben, ferner seien p und q zwei auf J nichtnegative Polynome. Setzen wir das Integrationsintervall J von T gleich $[c, d]$, $c < d$, so existiert zu ϵ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von p und q ein $\delta > 0$, so daß die Polynome $p+\epsilon$ und $q+\epsilon$ auf $[-\delta+c, d+\delta]$ nichtnegativ sind.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei nun $-\delta+c=t_0 < t_1 < \dots < t_N=d+\delta$ eine Zerlegung des Intervalles $[-\delta+c, d+\delta]$ mit $\max_i (t_{i+1}-t_i) < N^{-1}$.

Nach Satz 4.2 und Korollar 4.2.2 existiert eine Spektralfamilie (P_t) von metrischen Projektionen $P_t: H \rightarrow H$ auf abgeschlossene, konvexe Kegel mit Spitze in Null, so daß für jedes $x \in H$ gilt:

$$(p(T)+\epsilon I)(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N-1} (p(t_i)+\epsilon) \Delta P_{t_i}(x) \quad (\Delta P_{t_i} := P_{t_{i+1}} - P_{t_i}).$$

Setzen wir $S_{p,N} := \sum_{i=0}^{N-1} (p(t_i)+\epsilon) \Delta P_{t_i}$, so folgt, da die metrischen

Projektionen ΔP_{t_i} monoton und paarweise orthogonal, die Koeffiz-

ienten $p(t_i)+\epsilon$ nichtnegativ sind, für alle $x, y \in H$:

$$(i') \quad \langle x-y, S_{p,N}(x) - S_{p,N}(y) \rangle \geq 0$$

$$(ii') \quad \langle S_{p,N}(x), S_{q,N}(x) \rangle = \langle x, S_{pq,N}(x) \rangle$$

$$(iii') \quad \| S_{p,N}(x) - S_{p,N}(y) \|^2 \leq \langle x-y, S_{pp,N}(x) - S_{pp,N}(y) \rangle.$$

Zu (iii') vergleiche Beweis zu Theorem 9.3 aus Zarantonello [25].

Damit erhalten wir für $N \rightarrow +\infty$: die Operatoren $p(T)+\epsilon I$ und $q(T)+\epsilon I$

erfüllen (i') bis (iii'). Da nun ϵ beliebig war, ist $p(T)$ monoton und T besitzt die Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 5.2.1. Hieraus folgt die Behauptung.

5.2.1 Korollar

Sei $T: H \rightarrow H$ ein positiv-distributiver Spektraloperator mit Projektionsschranke 1 und Integrationsintervall J . Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf J stetige Funktion, dann gilt für den in Folgerung 4.1.1 definierten Operator $h(T)$: $h(T)$ ist ein positivhomogener, Gateaux-Gradienten Operator. Ist h auf J nichtnegativ, so ist $h(T)$ außerdem monoton.

Beweis: Da $h(T) = h^+(T) - h^-(T)$ und die Operatoren $h^+(T)$ und $h^-(T)$ bezüglich $[0, \|h\|_{\sup_J}]$ positiv-distributive Spektraloperatoren mit Projektionsschranke 1 sind, folgt aus Satz 5.2.2 und 5.1.1 (i), daß beide Operatoren positivhomogene, monotone Gateaux-Gradientenoperatoren sind.

5.3 Der Spektralzerlegungssatz bezüglich gleichmäßiger Konvergenz

In Satz 4.2 konnten wir zwar die Existenz und Eindeutigkeit der Spektralfamilie (P_t) bei beliebigem Integrationsintervall J beweisen, die Formel $q(T) = \int_J q(t) dP_t$ im Sinne starker Konvergenz jedoch nur unter der zusätzlichen Voraussetzung $J \subset \mathbb{R}^+$. Die Ursache hierfür liegt in der Argumentation des Beweises zu Satz 4.2. Denn besitzt J auch negative Elemente, so liegt $T(x)$ im allgemeinen nicht mehr in C_x (vergleiche (1) S.23). Insbesondere können wir also Gleichung (6) auf S.24 nicht auf $T(x)$ anwenden.

Wir werden nun zeigen, daß für reelle Hilberträume die Darstellung $q(T) = \int_J q(t) dP_t$ für positiv-distributive Spektraloperatoren T mit

Projektionsschranke 1 bei beliebigem J sogar bezüglich gleichmäßiger Konvergenz gilt. Hierzu benötigen wir die folgenden Hilfsmittel.

5.3.1 Definition

Eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Operatoren $T_n: H \rightarrow H$ heiße monoton, falls die Operatoren $(T_{n+1} - T_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder die Operatoren $(T_n - T_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Sinne von Definition 3.3.1 monoton sind. Die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heiße beschränkt, falls ein $M > 0$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Operatoren $MI - T_n$ und $T_n + MI$ monoton sind.

5.3.1 Lemma (Zarantonello [25])

Sei $T: H \rightarrow H$ ein positivhomogener, monotoner Gateaux-Gradientenoperator. Dann gilt für alle $x, y \in H$:

$$\langle x, T(y) \rangle \leq \langle x, T(x) \rangle^{2^{-1}} \cdot \langle y, T(y) \rangle^{2^{-1}}$$

Beweis: [25], Korollar 1 zu Lemma 6.2

5.3.2 Lemma

Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone, beschränkte Folge von positivhomogenen Gateaux-Gradientenoperatoren. Dann gilt:

Die Folge (T_n) ist in H stark konvergent und der durch

$T(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$ auf ganz H definierte Operator ist positivhomogen.

Beweis: O.B.d.A. sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $I - T_n$ und T_n monoton. Setzen wir für $n > m$ $T_{mn} := T_n - T_m$, dann erfüllt T_{mn} die Voraussetzungen von Lemma 5.3.1. Somit gilt für festes $x \in H$:

$$||T_{mn}(x)||^4 = \langle T_{mn}(x), T_{mn}(x) \rangle^2 \leq \langle x, T_n(x) \rangle - \langle x, T_m(x) \rangle ||T_{mn}(x)||^2.$$

Also ist die Folge $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H . Der Operator

$T: H \rightarrow H$, definiert durch $T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$, ist dann offensichtlich positivhomogen.

5.3.1 Satz (Spektralzerlegung bezüglich gleichmäßiger Konvergenz)

Sei $T: H \rightarrow H$ ein positiv-distributiver Spektraloperator mit Projektionsschranke 1 und Integrationsintervall J . Weiter sei (P_t) die zu T gehörende Spektralfamilie aus Satz 4.2 und q ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann gilt:

$$q(T) = \int_J q(t) dP_t$$

bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.

Beweis: Wir wollen zunächst jeder auf J nichtnegativen, oberhalb-stetigen Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ den Operator $u(T)$ zuordnen und dann zeigen, daß die Zuordnung $u \rightarrow u(T)$ additiv und monoton ist. Sei (p_n) eine Folge von Polynomen, die monoton fallend punktweise gegen u auf J konvergiert. Da für $m \geq n$ das Polynom $p_m - p_n$ auf J nichtnegativ ist, folgt wegen Korollar 5.2.1: Die Folge $(p_n(T))$ ist eine monotone, beschränkte Folge von positivhomogenen Gateauxgradientenoperatoren. Nach Lemma 5.3.2 gilt dann: $(p_n(T))$ ist in H stark konvergent. Wir ordnen nun der Funktion u den Limesoperator der Folge $(p_n(T))$ zu und bezeichnen ihn mit $u(T)$. (Vgl. [17])

Die Definition von $u(T)$ ist eindeutig. Denn ist (q_n) eine Polynomfolge vom gleichen Typ, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und genügend großes $m \in \mathbb{N}$ nach einem bekannten Satz von Dini über monotone Folgen von stetigen Funktionen

$$p_m(t) \leq q_n(t) + n^{-1}, \quad q_m(t) \leq p_n(t) + n^{-1} \quad \text{für } t \in J.$$

Aus Korollar 5.2.1 erhalten wir somit für jedes feste $x \in H$:

$$(1) \langle x, p_m(T)(x) \rangle \leq \langle x, (q_n(T) + n^{-1}I)(x) \rangle,$$

$$(2) \langle x, q_m(T)(x) \rangle \leq \langle x, (p_n(T) + n^{-1}I)(x) \rangle.$$

Ferner existiert nach Lemma 5.3.1 eine von n und m unabhängige Konstante $c > 0$, so daß gilt:

$$(3) \left\| (q_n(T)(x) + n^{-1}x - p_m(T)(x)) \right\|^2 \leq c(\langle x, q_n(T)(x) + n^{-1}x \rangle - \langle x, p_m(T)(x) \rangle).$$

Bilden wir jetzt in (1), (2) und (3) zuerst für $m \rightarrow +\infty$ und dann für $n \rightarrow +\infty$ den Limes, so folgt $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(T)$

Sei nun $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf J nichtnegative, oberhalbstetige Funktion mit $u(t) \geq v(t)$ für alle $t \in J$. Wir zeigen: der Operator $u(T) - v(T)$ ist monoton. Hier sei (r_n) eine Polynomfolge, die monoton fallen auf J punktweise gegen v konvergiert. Dann existiert nach dem oben erwähnten Satz von Dini und Korollar 5.2.1 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m(n) \in \mathbb{N}$ so daß für alle $x, y \in H$ und $m \geq m(n)$ gilt:

$$\langle x - y, r_m(T)(x) - r_m(T)(y) \rangle \leq \langle x - y, (p_n(T) + n^{-1}I)(x) - (p_n(T) + n^{-1}I)(y) \rangle.$$

Hieraus folgt die Monotonie der Zuordnung $u \rightarrow u(T)$ durch Limesbildung.

Die Additivität von $u \rightarrow u(T)$ ist offensichtlich.

Sei jetzt (P_t) die zu T gehörende Spektralfamilie aus Satz 4.2, und 1_t die Indikatorfunktion des Intervalles $]-\infty, t]$. Dann folgt aus der Konstruktion der metrischen Projektion P_t im Beweis zu Satz 4.2 für jedes $x \in H$: $P_t(x) = 1_t(T)(x)$.

Wir kommen nun zum Beweis unserer Behauptung

Sei q ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $J = [a, b]$.

Ferner sei ein $\delta > 0$ beliebig gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von q existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung

$$-\delta + a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b + \delta \quad (N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$$

des Intervalles $[-\delta + a, b + \delta]$, so daß für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(4) \quad -\varepsilon \leq q(t) - \sum_{i=0}^{N-1} q(t_i) (1_{t_{i+1}}(t) - 1_{t_i}(t)) \leq \varepsilon.$$

Wir zerlegen nun (4) in zwei Ungleichungen. Dabei bedeute q^+ den Positiv- und q^- den Negativteil von q , $I^+ = \{i | q(t_i) \geq 0\}$ und $I^- = \{i | q(t_i) < 0\}$.

Für $t \in [a, b]$ folgt aus (4):

$$(5) \quad q^-(t) + \sum_{i \in I^+} q(t_i) (1_{t_{i+1}}(t) - 1_{t_i}(t)) + \sum_{i \in I^-} (-q(t_i) (1_{t_{i+1}}(t) - 1_{t_i}(t))) \leq$$

$$\varepsilon + q^+(t) + \sum_{i \in I^+} q(t_i) (1_{t_i}(t) - 1_{t_{i+1}}(t)) + \sum_{i \in I^-} (-q(t_i) (1_{t_i}(t) - 1_{t_{i+1}}(t))),$$

$$(6) \quad q^+(t) + \sum_{i \in I^-} (-q(t_i) (1_{t_{i+1}}(t) - 1_{t_i}(t))) + \sum_{i \in I^+} q(t_i) (1_{t_i}(t) - 1_{t_{i+1}}(t)) \leq$$

$$\varepsilon + q^-(t) + \sum_{i \in I^+} q(t_i) (1_{t_{i+1}}(t) - 1_{t_i}(t)) + \sum_{i \in I^-} (-q(t_i) (1_{t_{i+1}}(t) - 1_{t_i}(t))).$$

Da auf beiden Seiten von (5) und (6) auf J nichtnegative, oberhalbstetige Funktionen stehen, folgt aus der Additivität und der Monotonie des Funktionalkalküls von S.38 nach geeigneter Umordnung mit $S_N := \sum_{i=0}^{N-1} q(t_i) (P_{t_{i+1}} - P_{t_i})$ für alle $x, y \in H$:

$$(7) \quad -\varepsilon \|x - y\|^2 \leq \langle x - y, (q(T) - S_N)(x) - (q(T) - S_N)(y) \rangle, \text{ und}$$

$$(8) \quad \langle x - y, (q(T) - S_N)(x) - (q(T) - S_N)(y) \rangle \leq \|x - y\|^2 \varepsilon.$$

Wegen (7), Korollar 5.2.1, Lemma 3.3.3 und 3.3.4 ist der Operator $q(T) - S_N + \epsilon I$ ein positivhomogener, monotoner Gateaux-Gradientenoperator. Mit Lemma 5.3.1 folgt dann aus (8) für alle $x \in H$:

$$\begin{aligned} & \| (q(T) - S_N + \epsilon I)(x) \|^4 \leq \\ & \langle x, (q(T) - S_N + \epsilon I)(x) \rangle \cdot \langle (q(T) - S_N + \epsilon I)(x), (q(T) - S_N + \epsilon I)^2(x) \rangle \leq \\ & 4\epsilon^2 \|x\|^2 \| (q(T) - S_N + \epsilon I)(x) \|^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $\| (q(T) - S_N + \epsilon I)(x) \| \leq 2\epsilon \|x\|$ und aus der Dreiecksungleichung folgt schließlich für alle $x \in H$

$$\| (q(T) - S_N)(x) \| \leq 3\epsilon \|x\|.$$

Da ϵ beliebig war, folgt also die Behauptung.

5.4 Beispiele für Spektraloperatoren mit gleichmäßig konvergenter Spektralzerlegung

a) Positivhomogene Nemytskii-Operatoren

Sei D eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. $M(D, \mathbb{R})$ bezeichne die Menge aller auf D reellwertigen, meßbaren Funktionen.

Weiter sei $g: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften: (i) für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist $g(s, \cdot)$ auf D meßbar,

(ii) Für fast alle $x \in D$ ist $g(\cdot, x)$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

Sei nun X ein Teilraum von $M(D, \mathbb{R})$ und für jedes $u \in X$ sei das Element $N(u)$ von $M(D, \mathbb{R})$ definiert durch

$$N(u)(x) := g(u(x), x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Der Operator N heißt dann ein von g erzeugter Nemytskii-Operator.

Sei nun D zusätzlich beschränkt. Wir zeigen:

Für den reellen Hilbertraum $L^2(D, \mathbb{R})$ ist jeder positivhomogene, monotone Nemytskii-Operator $N: L^2(D, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(D, \mathbb{R})$ ein positiv-distributiver Spektraloperator.

Beweis: Sei $g: \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ die N erzeugende Abbildung. Da N positivhomogen ist, folgt für alle $t \geq 0$ und fast alle $x \in D$:

$$g(t, x) = tg(1, x).$$

Damit gilt für fast alle $x \in D$ und alle $u \in L^2(D, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} N(u)(x) &= g(u^+(x), x) + g(u^-(x), x) \\ &= g(1, x)u^+(x) - (-g(-1, x))u^-(x). \end{aligned}$$

Weiter ist nach Vainberg [22] N genau dann monoton, wenn g für fast alle $x \in D$ auf $\mathbb{R}$ monoton steigend ist. Also sind die Funktionen $g(1, \cdot): D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $-g(-1, \cdot): D \longrightarrow \mathbb{R}$ für fast alle $x \in D$ nichtnegativ.

Wegen $N(u) \in L^2(D, \mathbb{R})$ für alle $u \in L^2(D, \mathbb{R})$ existiert nach Krasnoselskii [12] ein $f \in L^2(D, \mathbb{R})$ und ein $b > 0$, so daß für alle $(s, x) \in \mathbb{R} \times D$ gilt: $|g(s, x)| \leq f(x) + b|s|$.

Hieraus folgt für fast alle $x \in D$: $g(1, x) \leq b$ und $-g(-1, x) \leq b$.

Sei nun $J = [0, b]$ und p ein auf J nichtnegatives Polynom.

Dann gilt für fast alle $x \in D$ und alle $u \in L^2(D, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} p(N)(u)(x) &= p(g(1, x))u^+(x) - p(g(-1, x))u^-(x) \quad \text{und} \\ N(p(N)(u))(x) &= p(N)(N(u))(x). \end{aligned}$$

Also ist N bezüglich J positiv-distributiv.

Schließlich bleibt zu zeigen: $\|p(N)\|_{Lip} \leq \|p\|_{\sup_J}$.

Für $u, v \in L^2(D, \mathbb{R})$ gilt folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|p(N)(u) - p(N)(v)\|^2 &= \\ \int_D (p(g(1, x))(u^+(x) - v^+(x)) + p(g(-1, x))(v^-(x) - u^-(x)))^2 dx &\leq \\ (\|p\|_{\sup_J})^2 \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

Damit besitzt N nach Satz 5.3.1 eine Spektralzerlegung bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.

b) Nichtlineare Integraloperatoren vom Uryson-Typ

Sei D und $L^2(D, \mathbb{R})$ wie unter a). Ferner seien $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ zwei auf $D \times D$ quadratisch integrierbare, symmetrische und nicht-negative Funktionen, A_1 und A_2 die von ihnen auf $L^2(D, \mathbb{R})$ erzeugten selbstadjungierten Operatoren. Weiter existiere eine Orthonormalbasis (e_n) in $L^2(D, \mathbb{R})$, so daß die Funktionen (e_n) Eigenfunktionen von A_1 und A_2 sind.

Sei $C := \{u \in L^2(D, \mathbb{R}) \mid \int_D u(x) e_n(x) dx \geq 0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $C^\perp$ der duale Kegel von C und P_C , $P_{C^\perp}$ die induzierten metrischen Projektionen. Definieren wir nun $T: L^2(D, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(D, \mathbb{R})$ durch

$$T(u)(x) = \int_D K_1(x, y) P_C(u)(y) dy + \int_D K_2(x, y) P_{C^\perp}(u)(y) dy,$$

dann ist T ein nichtlinearer Integraloperator vom Uryson-Typ und es gilt: T ist ein positiv-distributiver Spektraloperator mit Projektionsschranke $K = 1$.

Beweis: Zur Definition von Integraloperatoren vom Uryson-Typ verweisen wir auf Krasnoselskii [12]. Sei nun (a_n) und (b_n) mit $A_1(e_n) = a_n e_n$ und $A_2(e_n) = b_n e_n$ gegeben. Setzen wir $c := \max_n(a_n, b_n)$ so folgt für alle auf $J := [0, c]$ nichtnegativen Polynome p

$$p(T) = p(A_1)P_C + p(A_2)P_{C^\perp}.$$

Die Behauptung folgt dann mit ähnlichen Argumenten wie unter a).

- c) Jeder lineare, selbstadjungierte Operator $A: H \rightarrow H$ besitzt eine Spektralzerlegung bezüglich gleichmäßiger Konvergenz. (Vgl. RIESZ-NAGY [17]).

§6. Analyse des Spektrum eines positiv-distributiven Spektraloperators an Hand seiner Spektralzerlegung

Unseren Betrachtungen liegt die folgende Definition zugrunde.
Für einen beliebigen Operator $T \in \text{Lip}_0(H)$ heiße die Menge

$$\rho(T) := \{s \in \mathbb{R} \mid (T-sI) \text{ ist in } \text{Lip}_0(H) \text{ invertierbar}\}$$

die Resolventenmenge von T. Die Menge

$$\sigma(T) := \{s \in \mathbb{R} \mid s \notin \rho(T)\}$$

heiße das Spektrum von T.

Bemerkung

Nach Theorem 3.1 aus Martin [14] ist $\rho(T)$ stets offen in $\mathbb{R}$,
also $\sigma(T)$ stets abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Im folgenden bedeute $T:H \rightarrow H$ einen positiv-distributiven
Spektraloperator mit Projektionsschranke 1 und Integrationsinter-
vall J. Ferner sei (P_t) die zu T gehörende Spektralfamilie. Wir
erinnern daran, daß jedes $P_t:H \rightarrow H$ eine metrische Projektion
auf einen abgeschlossenen, konvexen Kegel mit Spitze in Null ist.

6.1 Charakterisierung des Spektrums durch Wachstums- und Nicht- linearitätseigenschaften der Spektralfamilie (P_t)

6.1.1 Definition

Ein $s \in \mathbb{R}$ heiße Konstanzpunkt von (P_t) , falls ein $\varepsilon > 0$
existiert mit $P_{s-\varepsilon} = P_{s+\varepsilon}$

6.1.2 Definition

Ein konvexer Kegel C von H heiße echter Kegel, falls ein
 $v \in C$ existiert, so daß $-v \notin C$ gilt.

Echte Kegel mit Spitze in Null haben die folgende Eigenschaft:

6.1.1 Lemma

Sei C ein abgeschlossener echter Kegel mit Spitze in Null.

Dann gilt: $-C \cap C^\perp$ besitzt mindestens ein von Null verschiedenes Element.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $v \in C$ mit $v \neq 0$ und $-v \notin C$. Nach Lemma 3.3.1 gibt es ein $u \in C$ und ein $u^\perp \in C^\perp$ mit $-v = u + u^\perp$. Also folgt $-(v+u) \in -C \cap C^\perp$. Ferner muß $v + u \neq 0$ sein, denn sonst wäre $u^\perp = 0$ und damit im Widerspruch zu Voraussetzung $-v = u \in C$.

Bezeichne nun $\sigma_K(P_t)$ die Menge aller Konstanzpunkte von (P_t) und $\sigma_N(P_t)$ die Menge aller $s \in \mathbb{R}$, für die P_s keine Orthogonalprojektion ist. Dann gilt für $\sigma(T)$:

6.1.1 Satz

$$\sigma(T) = \bigcap_{\mathbb{R}} (\sigma_K(P_t)) \cup \sigma_N(P_t).$$

Beweis: Wir zeigen $\rho(T) = \sigma_K(P_t) \cap \bigcap_{\mathbb{R}} \sigma_N(P_t)$.

Sei also $s \in \rho(T)$ gegeben und $P(\cdot)$ das von (P_t) induzierte Spektralmaß mit Träger $\text{Tr}P(\cdot)$. Angenommen es gilt: $s \in \text{Tr}P(\cdot)$.

Dann gilt für beliebiges $r > 0$ $P_{s+r} - P_{s-r} \neq 0$. Also existiert ein $x \in \text{Im}(P_{s+r} - P_{s-r})$ mit $x \neq 0$ und $x_r :=$

$$\int_{\text{Tr}P(\cdot)} ((1(t) - 1(t)) (t-s+2r)^{-1}) dP_t(x) \neq 0.$$

Wegen $s \in \rho(T)$, Theorem 2.2 und Theorem 3.1 aus Martin [14],

folgt für $r < (||T-sI||^{-1})^{-1}$ und für alle $z \in H$

$$||z||^2 \leq ||(T-sI)^{-1}||^2 (1-r ||(T-sI)^{-1}||)^{-2} ||(T-(s-r)I)(z)||^2.$$

Für $z = x_r$ und r genügend klein, können wir hieraus schließen:

$$(9r^2)^{-2} \|x_r\|^2 \leq \|(T-sI)^{-1}\|^2 (1-r\|(T-sI)^{-1}\|)^{-2} \|x\|^2. \text{ Nach}$$

Multiplikation mit $\|x\|^{-2} 9r^2$ erhalten wir:

$$1 \leq \|(T-sI)^{-1}\|^2 \cdot (1-r\|(T-sI)^{-1}\|)^{-2} \cdot 9r^2.$$

Für $r \rightarrow 0$ führt dies zu einem Widerspruch. Damit haben wir gezeigt, aus $s \in \rho(T)$ folgt $s \notin \text{TrP}(\cdot)$, also $s \in \sigma_K P_t$.

Wir zeigen weiter: P_s ist linear.

Hierbei können wir annehmen, daß $s \in] \inf \text{TrP}(\cdot), \sup \text{TrP}(\cdot)[$ ist.

Angenommen $\text{Im}(P_s)$ ist ein echter Kegel. Nach Lemma 6.1.1

existiert dann ein $x_s \in H$, so daß für die Vektoren

$$y_s := \int_{\text{TrP}(\cdot)} 1_s(t) (s-t)^{-1} dP_t(-x_s),$$

$$z_s := \int_{\text{TrP}(\cdot)} (1-1_s(t)) (t-s)^{-1} dP_t(x_s) \text{ gilt: } y_s \neq 0, z_s \neq 0, y_s \neq z_s$$

und $(T-sI)(y_s) = (T-sI)(z_s)$. (Vgl. Zarantonello [25]).

Also ist $T-sI$ im Widerspruch zu $s \in \rho(T)$ nicht invertierbar.

Sei nun umgekehrt $s \in \sigma_K(P_t) \cap \bigcap_{\mathbb{R}} \sigma_N(P_t)$. Dann folgt $s \notin \text{TrP}(\cdot)$

und die Kegel $\text{Im}(P_s)$ und $\text{Im}(P_s)^\perp$ sind orthogonale Unterräume

von H . Hieraus erhalten wir mit Zarantonello [25] (S.412): $s \in \rho(T)$.

6.2 Klassifizierung des Spektrums an Hand des Spektralmaßes in Punkt-, approximatives- und Restspektrum

6.2.1 Definition

Ein $s \in \mathbb{R}$ heie ein Eigenwert von T , falls ein $x \in H$

existiert mit: $x \neq 0$ und $T(x) = s \cdot x$. Die Menge aller Eigen-

werte von T heie das Punktspektrum $\sigma_{\text{pkt.}}(T)$ von T .

6.2.2 Definition

Das approximative Spektrum $\sigma_{\text{appr.}}(T)$ von T ist die Menge aller $s \in \mathbb{R}$, für welche eine Folge $(x_n) \in H$ existiert, so daß gilt: $\|x_n\|=1$, die Folge $(T-sI)(x_n)$ konvergiert gegen 0.

6.2.3 Definition

Das Restspektrum $\sigma_{\text{Rest.}}(T)$ ist die Menge aller $s \in \sigma(T)$, die nicht in $\sigma_{\text{appr.}}(T)$ enthalten sind.

6.2.1 Satz

Es gelten folgende Aussagen:

- (i) $\sigma_{\text{pkt.}}(T) = \{s \in \mathbb{R} \mid P(\{s\}) \neq 0\}$,
- (ii) $\sigma_{\text{appr.}}(T) = \text{TrP}(\cdot)$,
- (iii) $\sigma_{\text{Rest.}}(T) = \{s \in \sigma(T) \mid s \notin \text{TrP}(\cdot)\}$.

Beweis: Zu (i): folgt aus Zarantonello [25], S.409.

Zu (ii): Sei $s \in \sigma_{\text{appr.}}(T)$ und $(x_n) \in H$ mit $\|(T-sI)(x_n)\| \rightarrow 0$ gegeben. Dann folgt wegen

$$\|(T-sI)(x_n)\|^2 = \int_{\text{TrP}(\cdot)} 1_s(t) (s-t)^2 d\langle P_t(x_n), x_n \rangle$$

$$+ \int_{\text{TrP}(\cdot)} (1-1_s(t)) (s-t)^2 d\langle P_t(x_n), x_n \rangle \geq$$

$$\inf_{t \in \text{TrP}(\cdot)} (s-t)^2 (\|P_s(x_n)\|^2 + \|(I-P_s)(x_n)\|^2) = \inf_{t \in \text{TrP}(\cdot)} (s-t)^2 \quad \text{für}$$

$n \rightarrow \infty$, $\inf_{t \in \text{TrP}(\cdot)} (s-t)^2 = 0$. Da $\text{TrP}(\cdot)$ abgeschlossen ist, folgt

$s \in \text{TrP}(\cdot)$. Sei jetzt $s \in \text{TrP}(\cdot)$ gegeben. Setze $A_n = \{t \in \mathbb{R} \mid |t-s| < n^{-1}\}$.

Dann gilt: $P(A_n) \neq 0$ und es existiert ein $x_n \in \text{Im}(P(A_n))$ mit $\|x_n\|=1$. Da

$$\|(T-sI)(x_n)\|^2 = \int_{\text{TrP}(\cdot)} (t-s)^2 d\langle P_t(x_n), x_n \rangle \leq n^{-1} \|x_n\|^2, \text{ folgt}$$

also $s \in \sigma_{\text{appr.}}(T)$.

Zu (iii): folgt aus (ii) und Definition 6.2.3

6.2.1 Korollar

$$\sigma(T) = \sigma_{\text{appr.}}(T) \cup \sigma_{\text{Rest.}}(T) .$$

Beweis: folgt unmittelbar aus Satz 6.1.1 und Satz 6.2.1 .

6.2.2 Korollar

Sei T zusätzlich homogen, dann ist $\sigma_{\text{Rest.}}(T) = \emptyset$.

Beweis: Da T homogen ist, sind die konvexen Kegel $\text{Im}(P_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ abgeschlossene Unterräume von H . Also sind die metrischen Projektionen P_t lineare Orthogonalprojektion und $\sigma_N(P_t) = \emptyset$.

6.3 Beziehungen zwischen Integrationsintervall, Spektrum und numerischen Wertebereich

6.3.1 Definition

Die Menge $W(T) := \{ \langle T(x) - T(y), x - y \rangle \mid \|x - y\|^{-2} \mid x, y \in H, x \neq y \}$ heißt der numerische Wertebereich von T .

6.3.1 Satz

Sei J das Integrationsintervall von T . Dann gilt:

$$\text{TrP}(\cdot) \subseteq \sigma(T) \subseteq \overline{W(T)} \subseteq J .$$

Beweis: Wegen Satz 6.1.1 und $\text{TrP}(\cdot) = \bigcap_{\mathbb{R}} \sigma_K(P_t)$ ist $\text{TrP}(\cdot) \subseteq \sigma(T)$.

Da $T \in \text{Lip}_0(H)$ ist T ein beschränkter, stetiger Operator, also folgt nach Zarantonello [26] und [27]: $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$. Schließlich sind die Operatoren $bI - T$ und $T - aI$ (mit $J = [a, b]$) wegen Korollar 5.2.1 monoton. Damit folgt $\overline{W(T)} \subseteq J$.

Bemerkung

- 1) Gilt für alle $t \in] \inf \text{TrP}(\cdot), \sup \text{TrP}(\cdot) [$, P_t ist linear, dann folgt $\text{TrP}(\cdot) = \sigma(T)$.
- 2) Gilt für alle t aus 1), P_t ist nicht linear, dann folgt $\sigma(T) = \overline{W(T)}$
- 3) Gilt für alle $t \in [a, b[$ (mit $J = [a, b]$), P_t ist nicht linear, dann

folgt $\sigma(T) = \overline{W(T)} = J$

4) Wie Beispiel 2 aus 4.3 zeigt, ist Satz 6.3.1 für komplexe Hilberträume im allgemeinen falsch. Der in 4.3 gegebene positiv-distributive Spektraloperator besitzt komplexe Eigenwerte.

6.4 Beispiel eines nicht linearen, kompakten Operators mit überabzählbarem Spektrum

Sei $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Operator aus 1.2, Beispiel f) mit $a_i \neq a_j$.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß T ein nicht linearer, positiv-distributiver Spektraloperator mit Projektionsschranke 1 ist.

Offensichtlich ist T kompakt. Bezeichne 1_t die Indikatorfunktion von $[0, t]$, so gilt für die Elemente der zu T gehörenden Spektralfamilie (P_t) :

$$P_t(x, y) = \begin{pmatrix} 1_t(a_1) & 0 \\ 0 & 1_t(a_2) \end{pmatrix} (x, y) \text{ falls } x \geq 0, y \geq 0,$$

$$P_t(x, y) = \begin{pmatrix} 1_t(a_3) & 0 \\ 0 & 1_t(a_2) \end{pmatrix} (x, y) \text{ falls } x \leq 0, y \geq 0,$$

$$P_t(x, y) = \begin{pmatrix} 1_t(a_3) & 0 \\ 0 & 1_t(a_4) \end{pmatrix} (x, y) \text{ falls } x \leq 0, y \leq 0,$$

$$P_t(x, y) = \begin{pmatrix} 1_t(a_1) & 0 \\ 0 & 1_t(a_4) \end{pmatrix} (x, y) \text{ falls } x \geq 0, y \leq 0,$$

Da für alle $t \in [0, \max_i a_i[$ P_t nicht linear ist, ist das Spektrum von T nach Satz 6.1.1 überabzählbar.

Literaturverzeichnis

- [1] BERGER M.S.
BERGER M.S. Perspectives in Nonlinearity,
Mathematics Lecture Note Series,
New York (1968)
- [2] BROWDER F.E. Nonlinear Operators and Nonlinear
Equations, Proc. of Symposia in Pure
Mathematics, AMS XVIII (2) (1976)
- [3] DIESTEL J. Geometry of Banach Spaces- Selected
Topics, Lecture Notes in Mathematics
485, Springer-Verlag, Berlin (1975)
- [4] DUNFORD N.
SCHWARTZ J.T. Linear Operators I, Interscience Pub-
lishers, New York (1958)
- [5] DUNFORD N.
SCHWARTZ J.T. Linear Operators II, Interscience Pub-
lishers, New York (1963)
- [6] DUNFORD N.
SCHWARTZ J.T. Linear Operators III, Interscience Pub-
lishers, New York (1971)
- [7] FLASCHKA H. A Nonlinear Spectral Theorem for Ab-
stract Nemytskii-Operators, Indiana
Univ. Math. Jour. 21 (1971)
- [8] GROTHENDIECK A. Sur les applications lineaires faiblement
compactes d'espaces du type $C(K)$,
Canadian J.Math. 5 (1953)
- [9] HUBBARD J.R. Homogenous Maps between Banach Spaces,
Dissertation, University of Michigan
(1973)

- [10] KACUROVSKII R.I. The Regular Points, Spectrum and Eigen-
functions of Nonlinear Operators,
Soviet Math.Dokl. 10 (1969)
- [11] KNOTT J. Metrische Projektionen auf konvexe
Kegel und Spektraldarstellung nach
Zarantonello, Diplomarbeit, Erlangen
(1974)
- [12] KRASNOSELSKII M. Topological Methods in the Theory of
Nonlinear Integral Equations, Internat.
Series of Monographs in Pure and Applied
Mathematics 45 (1964)
- [13] LORCH E.R. Means of iterated Transformations in
reflexive Vector Spaces, Bull. of the
American Math. Soc. 45 (1939)
- [14] MARTIN, Jr. R.H. Nonlinear Operators and Differential-
equations in Banach Spaces, Pure and
Applied Mathematics, New York (1976)
- [15] MOREAU J.J. Decomposition orthogonale dans un espace
hilbertien selon deux cones mutuellement
polaires, C.R.Acade. Sci. Paris (1962)
- [16] NIERENBERG L. Topics in Nonlinear Functionalanalysis,
Courant Institute of Math. Science,
New York (1973)
- [17] RIESZ F.
NAGY BELA SZ. Vorlesungen über Funktionalanalysis,
Hochschulbücher für Mathematik 27, Dritte
Auflage (1973)
- [18] RINGROSE J.R. On wellbounded Operators I, Jour. Aus-
tralian Math. Soc. 1 (1960)
- [19] RINGROSE J.R. On wellbounded Operators II, Proc. London
Math. Soc. 13 (1963)

- [20] SINGER I. Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces, Springer-Verlag Berlin (1970)
- [21] SMART D.R. Conditionally Convergent Spectral Expansions, Jour. Australian Math. Soc. 1 (1960)
- [22] VAINBERG M.M. Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations, John Wiley&Sons, New York (1973)
- [23] YOSIDA K. Mean Ergodic Theorem in Banach Spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1938)
- [24] YOSIDA K. Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin, Vierte Auflage (1974)
- [25] ZARANTONELLO E.H. Projektions on convex sets in Hilbert space and Spectral Theory, Contribution to Nonlinear Functionalanalysis, Editor E.H.Zarantonello, Acad. Press New York (1971)
- [26] ZARANTONELLO E.H. The closure of the numerical range contains the spectrum, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)
- [27] ZARANTONELLO E.H. The closure of the numerical range contains the spectrum, Pac. J. Math. 33 (1967)

Lebenslauf

- 24.10.1949 : geboren in Oberwappenöst, Kreis Tirschenreuth/Bayern
- Eltern : Josef Knott, technischer Angestellter, und Ehefrau Mathilde, geb. Märkl, Hausfrau
- September 1956 : Einschulung in Oberwappenöst
- Dezember 1958-Juli 1960 : Besuch der Volksschule in Waldershof
- Ab September 1960 : Besuch des mathematisch-naturwissenschaftlichen Otto-Hahn-Gymnasiums Marktredwitz
28. Juni 1969 : Abitur
- WS 1969 : Beginn des Studiums der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg
- 15.5.1972 : Diplom-Vorprüfung für Mathematik
Im weiteren Verlauf des Studiums in mehreren Semestern als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik in Erlangen eingesetzt
- 30.7.1974 : Diplomprüfung für Mathematik
Thema der Diplomarbeit: "Metrische Projektionen auf konvexe Kegel und Spektral-darstellung nach Zarantonello
- November 1974 - August 1975 : Promotionsstipendium nach Graduiertenförderungsgesetz
- Seit September 1975 : wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern
- Seit 1.2.1974 : Verheiratet mit Margarete Knott, geb. Ziegler
- 2 Kinder : geboren am 3.8.1974 und am 13.11.1976

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197